**函数与极限**

**第一节 映射与函数**

设X、Y为两个非空集合，如果存在一个法则f，使得对X中每个元素x，按法则f，在Y中有唯一确定的元素y与之对应，那么称f为X到Y的**映射**。

其中y称为x的像，而元素x称为元素y的一个原像；集合X称为映射f的**定义域**，记作Df，即Df = X；X中所有的元素的像所组成的集合称为映射f的**值域**，记作Rf或f(X)，即Rf = f(X) = {f(x) | x∈X}。

设f是从集合X到集合Y的映射，若Rf = Y，即Y中的任一元素都是X中某元素的像，则称f为X到Y上的映射或**满射**；若对X中任意两个不同元素x1 ≠ x2，它们的像f(x1) ≠ f(x2)，则称f为X到Y的**单射**；若映射f既是单射，又是满射，则称f为**一一映射**或**双射**。

设f是X到Y的单射，则由定义，对于每个y∈Rf，有唯一的x ∈ X，适合f(x) = y，于是我们可以定义一个从Rf到X的新映射g，对每个y∈Rf，规定g(y) = x，则x满足f(x) = y。这个映射称为**逆映射**，记作f-1。只有单射才存在逆映射。

设有两个映射，g : X 🡪 Y1 f : Y2 🡪 Z。其中Y1∈Y2，则由映射g和f可以定义出一个从X到Z的对应法则，它将每个x∈X映射成f[ g(x) ]∈Z。这个对应法则确定了一个从x到z的映射，这个映射称为映射g和f构成的**复合映射**。

设数集D ∈ R，则称映射f : D 🡪 R为定义在D上的**函数**，通常记为y = f(x)，x∈D，其中x称为自变量，y称为因变量，D称为定义域，记作Df，即Df = D。

**函数的几种特性**

1. 函数的有界性
2. 函数的单调性
3. 函数的奇偶性

4，函数的周期性

设函数f : D 🡪 f( D )是单射，则它存在逆映射f-1 : f( D ) 🡪 D，称此映射f-1为函数f的**反函数**。

**五类初等函数：**

幂函数

指数函数

对数函数

三角函数

反三角函数

**双曲正弦**

shx = ( ex – e-x ) / 2

**双曲余弦**

chx = ( ex + e-x ) / 2

**双曲正切**

thx = shx / chx

**第二节 数列的极限**

如果按照某一法则，对每个n∈N+，对应着一个确定的实数xn，这些实数按照下标n从小到大排列得到的一个序列就叫做**数列**，简记为数列{xn}。

设{xn}为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的整数ε(无论它多小)，总存在正整数N，使得当n > N时，不等式|xn - a| < ε都成立，那么就称常数a是数列{xn}的**极限**，或者称数列{xn}**收敛**于a，记为limn🡪∞xn = a，或xn 🡪 a(n 🡪 ∞)。如果不存在这样的常数a，就说数列{xn}没有极限，或者说数列{xn}是发散的，习惯上也说极限不存在。

收敛数列的性质

**定理1(极限的唯一性)**如果数列{xn}收敛，那么它的极限唯一。

**定理2(收敛数列的有界性)**如果数列{xn}收敛，那么数列{xn}一定有界。

**定理3(收敛数列的保号性)**如果limn🡪∞xn = a，且a > 0(或a < 0)，那么存在正整数N，当n > N时，都有xn > 0(或xn < 0)。

**推论** 如果数列 {xn} 从某项起有xn ≥ 0 (或 xn ≤ 0)，且limn🡪∞xn = a，那么a ≥ 0(或a ≤ 0)。

**定理4(收敛数列与其子数列间的关系)** 如果数列{xn}收敛于a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是a。

**第三节 函数的极限**

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的数，那么这个确定的数就叫做在这一变换过程中函数的**极限**。

**定义1** 设函数 f(x) 在点x0的某一去心邻域内有定义。如果存在常数A，对于任意给定的正数ε(无论它多么小)，总存在正数δ，使得当x满足不等式0 < |x – x0| < δ时，对应的函数值f(x)满足不等式|f(x) - A| < ε，那么常数A就叫做函数f(x)当**x🡪x0时的极限**，记作limx🡪x0f(x) = A或f(x) 🡪 A。

在limx🡪x0f(x) = A的定义中，把0 < |x – x0| < δ改为 x0–δ< x < x0，那么A就叫做函数f(x)当x🡪x0时的左极限，同理还有右极限。左极限与右极限统称为**单侧极限**。

**定义2** 设函数f(x)当|x|大于某一正数时有定义。如果存在常数A，对于任意给定的正数ε(无论它多么小)，总存在着正数X，使得当x满足不等式|x| > X时，对应的函数值f(x)都满足不等式|f(x) - A| < ε,那么常数A就叫做函数f(x)当**x🡪∞时的极限**。记作limx🡪∞f(x) = A 或 f(x)🡪 A(当x🡪∞)。

**函数极限的性质**

**定理1(函数极限的唯一性)**如果limx🡪x0f(x)存在，那么这极限唯一。

**定理2(函数极限的局部有界性)**如果limx🡪x0f(x) = A，那么存在常数M > 0和δ > 0，使得当0 < |x – x0| <δ时，有|f(x)| ≤ M。

**定理3(函数极限的局部保号性)**如果limx🡪x0f(x) = A，且A > 0(或 A < 0)，那么存在常数δ > 0，使得当0 < |x – x0| <δ时，有f(x) > 0(或f(x) < 0)。

**定理3’** 如果limx🡪x0f(x) = A(A ≠ 0)，那么就存在着x0的某一去心邻域U(x0)当x∈U(x0)时，就有|f(x)| > |A| / 2。

**推论** 如果在x0的某去心邻域内f(x) ≥ 0(或f(x) ≤ 0),而且limx🡪x0f(x) = A，那么A≥ 0(或 A ≤ 0)。

**\*定理4(函数极限与数列极限的关系)** 如果极限limx🡪x0f(x)存在，{xn}为函数f(x)的定义域内任一收敛于x0的数列，且满足：x ≠ x0 (n ∈ N+)，那么相应的函数值数列{f(xn)}必收敛，且limn🡪∞f(x) = limx🡪x0f(x)。

**第四节 无穷大与无穷小**

**定义1** 如果函数f(x)当x 🡪 x0(或x 🡪 ∞)时的极限为零，那么称函数f(x)为当x 🡪 x0(或x🡪∞)时的**无穷小**。

**定理1** 在自变量的同一变化过程x 🡪 x0(或x 🡪 ∞)中，函数f(x)具有极限A的充要条件是f(x) = A + α，其中α是无穷小。

**定义2** 设函数f(x)在x0的某一去心邻域内有定义(或|x|大于某一正数时有定义)。如果对于任意给定的正数M(无论它多么大)，总存在正数δ(或正数x)，只要x适合不等式0 < |x – x0| <δ(或|x| > X)，对应的函数值f(x)总满足不等式|f(x)| > M，那么称函数f(x)是当x🡪x0(或x🡪∞)时的**无穷大**。

**定理2** 在自变量的同一变化过程中，如果f(x)为无穷大，那么1/f(x)为无穷小，反之，如果f(x)为无穷小，且f(x)≠0,那么1/f(x)为无穷大。

**第五节 极限运算法则**

**定理1** 两个无穷小的和是无穷小。

**定理2** 有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

**推论1** 常数与无穷小的乘积是无穷小。

**推论2** 有限个无穷小的乘积是无穷小。

**定理3** 如果limf(x) = A，limg(x) = B，那么

1. lim[f(x)±g(x)] = limf(x) ± limg(x) = A ± B
2. lim[f(x) \* g(x)] = limf(x) \* limg(x) = A \* B
3. 若B≠0，则limf(x) / g(x) = limf(x) / limg(x) = A / B

**推论1** 如果limf(x)存在，而c为常数，那么lim[cf(x)] = climf(x)。

**推论2** 如果limf(x)存在，而n是正整数，那么lim[f(x)]n = [limf(x)]n

**定理4** 设有数列{xn}和{yn}，如果limn🡪∞xn = A，limn🡪∞yn = B，那么

1. limn🡪∞(xn ± yn) = A ± B;
2. limn🡪∞(xn \* yn) = A \* B;
3. 当yn ≠ 0(n = 1, 2, …)且B ≠ 0时，limn🡪∞xn / yn = A / B。

**定理5** 如果φ(x) ≥ ψ(x)，而limφ(x) = A，limψ(x) = B，那么A ≥ B。

**定理6(复合函数的极限运算法则)** 设函数y = f[g(x)]是由函数u = g(x)与函数y = f(u)复合而成，f[g(x)]在点x0的某去心邻域内有定义，若limx🡪x0g(x) = u0，limu🡪u0f(x) = A，且存在δ0 > 0，当x∈U(x0, δ0)时，有g(x) ≠ u0，则limx🡪x0f[g(x)] = limu🡪u0f(u) = A。

**第六节 极限存在准则 两个重要极限**

**准则1** 如果数列{ xn },{ yn }及{ zn }满足下列条件：

1. 从某项起，即∃n0∈N+，当n>n0时，有yn ≤ xn ≤ zn；
2. limn🡪∞yn = a，limn🡪∞zn= a，

那么数列{xn}的极限存在，且limn🡪∞xn = a。

**准则1’** 如果

1. 当x∈U(x0,r)(或 |x| > M)时，g(x)≤f(x)≤h(x)；
2. limx🡪x0g(X) = A, limx🡪x0h(x) = A，那么limx🡪x0f(x)存在，且等于A。

准则1及准则1’称为**夹逼准则**。

**准则2** 单调有界数列必有极限。

**准则2’** 设函数f(x)在点x0的某个左邻域内单调并且有界，则f(x)在x0的左极限必定存在。

**柯西极限存在准则** 数列{xn}收敛的充要条件是：对于任意给定的整数ε，存在正整数N，使得当m > N，n > N时，有|xn - xm| <ε。

**第七节 无穷小的比较**

定义

如果limβ/α = 0，那么就说β是比α**高阶的无穷小**，记作β = o(α)；

如果limβ/α = ∞，那么就说β是比α**低阶的无穷小**；

如果limβ/α = c ≠ 0，那么就说β与α是**同阶无穷小**；

如果limβ/αk = c ≠ 0， k > 0,那么就说β是关于α的**k阶无穷小**；

如果limβ/α = 1，那么就说β与α是**等价无穷小**，记作α~ β；

**定理1** β与α是等价无穷小的充要条件为β = α + 0(α)

**定理2** 设a ~ ~a，β ~ ~β，且lim~β/~α存在，则limβ/α = lim ~β/ ~α。

**第八节 函数的连续性与间断点**

定义 设函数y = f(x)在点x0的某一领域内有定义，如果limΔx🡪0 Δy = lim Δx🡪0[f(x0 + Δx) – f(x0)] = 0，那么就称函数y = f(x)在点x0连续。

设函数y = f(x)在点x0的某一领域内有定义，如果limx🡪x0f(x) = f(x0)，那么就称函数f(x)在点x0连续。

**第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性**

**定理1** 设函数f(x)和g(x)在点x0连续，则它们的和(差)f ± g，积f \* g及商f / g(当g(x0) ≠ 0时)都在点x0连续。

**定理2** 如果函数y = f(x)在区间Ix上单调增加(或单调减少)且连续，那么它的反函数x = f-1(y)也在对应的区间Iy = {y|y = f(x), x∈Ix}上单调增加(或单调减少)且连续。

**定理3** 设函数y = f[g(x)]由函数u = g(x)与函数y = f(u)复合而成，U(x0) ∈Df\*g，若limx🡪x0g(x) = u0，而函数y = f(u)在u = u0连续，则limx🡪x0f[g(x)] = limu🡪u0f(u) = f(u0)。

**定理4** 设函数y =f[g(x)]是由函数u = g(x)与函数y = f(u)复合而成，U(x0)∈Df\*g。若函数u = g(x)在 x = x0连续，且g(x0) = u0,而函数y = f(u)在u = u0连续，则复合函数y = f[g(x)]在x = x0也连续。

基本初等函数在它们的定义域内都是连续的。

**第十节 闭区间上连续函数的性质**

**定理1(有界性与最大值最小值定理)** 在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值。

**定理2(零点定理)** 设函数f(x)在闭区间[a, b]上连续，且f(a)与f(b)异号，则在开区间(a, b)内至少有一点ξ，使f(ξ) = 0。

**定理3(介值定理)** 设函数f(x)在闭区间[a, b]上连续，且在这区间的端点取不同的函数值f(a) = A及f(b) = B，则对于A与B之间的任意一个数C，在开区间(a, b)内至少有一点ξ，使得f(ξ) = C(a < ξ< b)。

**推论** 在闭区间[a, b]上连续的函数f(x)的值域为闭区间[m, M]，其中m与M依次为f(x)在[a, b]上的最大值与最小值。

**定义** 设函数f(x)在区间I上有定义，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于区间I上的任意两点x1,x2，当|x1 – x2| < δ时，有|f(x1) – f(x2)| < ε，那么称函数f(x)在区间I上**一致连续**。

**定理4(一致连续性定理)** 如果函数f(x)在闭区间[a,b]上连续，那么它在该区间上一致连续。

φψΔ